Sugli operatori monotoni ed il principio del massimo debole

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $A(x)$ una matrice simmetrica a coefficienti variabili e misurabili su Ω e $V : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Supponiamo inoltre che A e V siano tali che l'espressione

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot A(x)\nabla\psi \, dx + \int_\Omega V\varphi\psi \, dx$$

è ben definita per ogni $\varphi, \psi \in H^1_0(\Omega)$, dove abbiamo usato la notazione

$$\nabla\varphi \cdot A(x)\nabla\psi = \sum_{1\le i,j\le d} \partial_i\varphi \, a_{ij}(x) \, \partial_j\psi \,,$$

dove a_{ij} sono i coefficienti della matrice A.

Data una funzione $f \in L^2(\Omega)$ e una funzione $u \in H^1_0(\Omega)$, diciamo che u è soluzione dell'equazione

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) + Vu = f \quad \text{in} \quad \Omega \,, \quad u \in H^1_0(\Omega).$$

in senso debole H^1, se

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot A(x)\nabla u \, dx + \int_\Omega V(x)\varphi u \, dx = \int_\Omega f(x)\varphi \, dx \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Proposizione 1. *Supponiamo che*

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot A(x)\nabla\varphi \, dx + \int_\Omega V(x)\varphi^2 dx \ge 0 \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in H^1_0(\Omega),$$

con uguaglianza se e solo se $\varphi \equiv 0$.

(a) *Se $u \in H^1_0(\Omega)$ è una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) + Vu = f \quad \text{in} \quad \Omega \,, \quad u \in H^1_0(\Omega),$$

allora u è l'unico minimo del funzionale

$$J(\varphi) := \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\nabla\varphi \cdot A(x)\nabla\varphi + V(x)\varphi^2\Big) dx - \int_\Omega f(x)\varphi \, dx.$$

In particolare, la soluzione dell'equazione è unica.

(b) *Se $u \in H^1_0(\Omega)$ è la soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) + Vu = f \quad \text{in} \quad \Omega \,, \quad u \in H^1_0(\Omega),$$

con $f \ge 0$ su Ω, allora

$$u \ge 0 \quad su \quad \Omega.$$

Proof. Per il punto (a), basta osservare che

$$J(u+\varphi) = J(u) + \int_\Omega \Big(\nabla\varphi \cdot A(x)\nabla\varphi + V(x)\varphi^2\Big) dx.$$

Il punto (b) invece segue dalla disuguaglianza

$$J(u) = J(u_+ - u_-) \ge J(u_+) + \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\nabla u_- \cdot A(x)\nabla u_- + V(x)u_-^2\Big) dx. \qquad \square$$